

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ. ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι : $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 8

A2. Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$ με αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, \dots, v_k και α_i όπου $i=1,2,\dots,k$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων τότε :

- Να αναφέρετε για ποιά δεδομένα χρησιμοποιείται το κυκλικό διάγραμμα.
- Με τι ισούται το τόξο α_i ;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.

Μονάδες 2

- β.** Η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.

Μονάδες 2

- γ.** Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.

Μονάδες 2

- δ. Σε ένα δείγμα μεγέθους n ο λόγος $\frac{N_i}{F_i}$ είναι ίσος με n .

Μονάδες 2

- ε. Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω , όταν $P(A) \leq P(B)$ τότε $A \subseteq B$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - kx^2 + 4$, $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{R}$. Αν $f'(-1) = -3f'(1)$, τότε :

- B1.** Να αποδείξετε ότι $k=3$.

Μονάδες 6

- B2.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 7

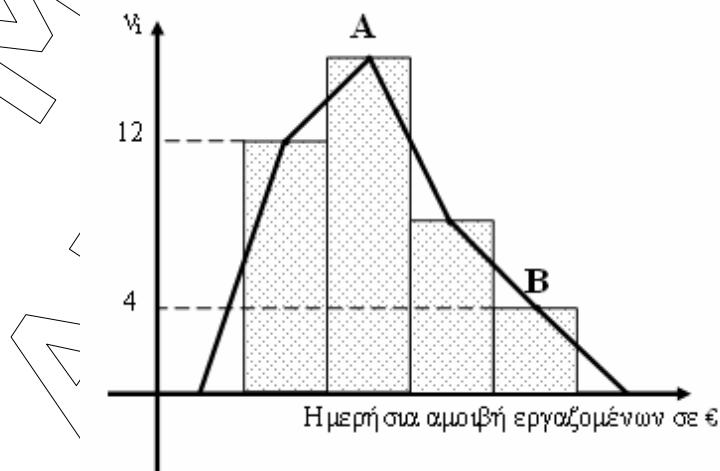
- B3.** Να βρείτε το όριο $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - 4}{h}$ και την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $(3, f(3))$.

Μονάδες 7

- B4.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , στην τετμημένη του οποίου ο ρυθμός μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , έχει την ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων σε ευρώ (€) και το πολύγωνο συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής 40 εργαζομένων μιας επιχείρησης. Τα δεδομένα έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους. Η τετμημένη του σημείου A είναι 35, του σημείου B είναι 55 και η μέση ημερήσια αμοιβή των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 36$ €.

Γ1. Να δείξετε ότι το πλάτος των κλάσεων είναι $c = 10$ και να γράψετε τις κλάσεις.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι οι συχνότητες v_2, v_3 της δεύτερης και της τρίτης κλάσης αντίστοιχα είναι $v_2 = 16$, $v_3 = 8$.

Μονάδες 6

Γ3. Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων της ημερήσιας αμοιβής των εργαζομένων της επιχείρησης, το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να εκτιμήσετε τη διάμεσο.

Μονάδες 9

Γ4. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος των εργαζομένων της επιχείρησης και A, B δύο ενδεχόμενα του Ω τέτοια ώστε $P(A') \leq 0,25$ και $P(B') \leq 0,65$.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{P(A - B) + P(B - A)}{2} \geq 0,55 - P(A \cap B)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους n και x_1, x_2, \dots, x_n οι παρατηρήσεις που έχουν μέση τιμή \bar{x} , τυπική απόκλιση s , συντελεστή μεταβλητότητας $CV = 25\%$ και διάμεσο δ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - (\bar{x} + 2s)x^2 + \left(\frac{503}{CV} + s\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$ έχει εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε :

Δ1. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 4$, $s = 1$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό c κατά τον οποίο πρέπει να αυξηθούν οι τιμές των παρατηρήσεων ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

- Δ3.** Υποθέτουμε ότι η παραπάνω κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική. Θεωρούμε δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με πιθανότητες

$$P(A) = \frac{2s}{\bar{x}} \text{ και } P(B) = \frac{1}{2\delta - 5s}.$$

- i. Αν $P(A \cap B) \cdot P(A \cup B) = \frac{1}{9}$ να βρείτε τις πιθανότητες:

$$P(A \cap B), P(A \cup B) \text{ και } P(A \cup B').$$

Μονάδες 9

- ii. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων x_i , με $x_i \leq 2$ είναι 5 τότε να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4